

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. $(x+1)^4$ 的展开式中 x^2 的系数为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = \frac{\pi}{3}, a = 2, b = \sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

15. 已知各棱长都相等的直三棱柱(侧棱与底面垂直的棱柱称为直棱柱)所有顶点都在球 O 的表面上. 若球 O 的表面积为 28π , 则该三棱柱的侧面积为_____.

16. 经过椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 中心的直线与椭圆相交于 M, N 两点(点 M 在第一象限), 过点 M 作 x 轴的垂线, 垂足为点 E . 设直线 NE 与椭圆的另一个交点为 P . 则 $\cos \angle NMP$ 的值是_____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1 = 1$, 且 $2a_2, \frac{3}{2}a_3, a_4$ 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

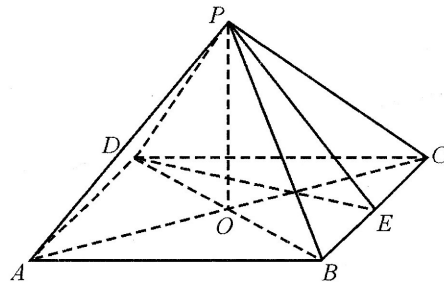
(II) 设 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_{n+1} \cdot \log_2 a_{n+3}}, n \in \mathbf{N}^*$. 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, O 是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的中心, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 BC 的中点.

(I) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD ;

(II) 若 $PE = 3$, 求二面角 $D-PE-B$ 的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

某动漫影视制作公司长期坚持文化自信, 不断挖掘中华优秀传统文化中的动漫题材, 创作出一批又一批的优秀动漫影视作品, 获得市场和广大观众的一致好评, 同时也为公司赢得丰厚的利润. 该公司 2013 年至 2019 年的年利润 y 关于年份代号 x 的统计数据如下表(已知该公司的年利润与年份代号线性相关):

年 份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
年份代号 x	1	2	3	4	5	6	7
年利润 y (单位: 亿元)	29	33	36	44	48	52	59

(I) 求 y 关于 x 的线性回归方程, 并预测该公司 2020 年(年份代号记为 8)的年利润;

(II) 当统计表中某年年利润的实际值大于由(I)中线性回归方程计算出该年利润的估计值时, 称该年为 A 级利润年, 否则称为 B 级利润年. 将(I)中预测的该公司 2020 年的年利润视作该年利润的实际值, 现从 2013 年至 2020 年这 8 年中随机抽取 2 年, 求恰有 1 年为 A 级利润年的概率.

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 点 P 在椭圆 E 上, $PF_2 \perp F_1F_2$, 且 $|PF_1| = 3|PF_2|$.

(I) 求椭圆 E 的标准方程;

(II) 设直线 $l: x = my + 1 (m \in \mathbf{R})$ 与椭圆 E 相交于 A, B 两点, 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 相交于 C, D 两点, 求 $|AB| \cdot |CD|^2$ 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \ln(x+1)$, 其中 $m \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $m > 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{e^x}$. 若 $g(x) > \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的最大值.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = m^2 \\ y = 2m \end{cases} (m \text{ 为参数})$. 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta - \rho \cos \theta + 1 = 0$.

(I) 求直线 l 的直角坐标方程与曲线 C 的普通方程;

(II) 已知点 $P(2, 1)$, 设直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点, 求 $\frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|}$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-1| + |x+3|$.

(I) 解不等式 $f(x) \geq 6$;

(II) 设 $g(x) = -x^2 + 2ax$, 其中 a 为常数. 若方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有两个不相等的实数根, 求实数 a 的取值范围.